ELEKTROTEKNIK

9. MARTS 1940 Redigeret af *H. KROMANN KRISTENSEN*, M. Ing. F. (Ansv.) SIDE E. 21—32

GRUNDTRÆK AF SANDSYNLIGHEDSREGNINGENS ANVENDELSE I TELEFONIEN

SPECIELT BEREGNING AF LEDNINGS- OG VÆLGERANTAL

Foredrag holdt af Civilingeniør *E. Brockmeyer*, K.T.A.S.,
i Dansk Ingeniørforenings Elektroingeniørgruppe 17. November 1939

1. Indledning.

Den hensigtsmæssige Gennemførelse af Telefontrafik og Indretning af Telefoncentraler stiller saa mange Problemer, som til deres rette Løsning kræver Anvendelse af sandsynlighedsteoretiske og statistiske Metoder, at det i et Foredrag kun er muligt at give en nogenlunde udførlig Omtale af en lille Del af disse Spørgsmaal. Jeg skal derfor i det følgende hovedsagelig begrænse mig til de simpleste Tilfælde af de Problemer, der utvivlsomt er de vigtigste og mest fundamentale, nemlig Bestemmelsen af Lednings- og Vælgerantal, saaledes at man opnaar en foreskreven Godhedsgrad for Gennemførelsen af Trafiken, d.v.s. saaledes, at kun en passende lille Del af Telefonopkaldene faar Ventetid eller bliver forgæves paa Grund af, at alle de paagældende Ledninger eller Vælgere er optaget.

Til Løsning af disse Spørgsmaal er der navnlig fra dansk Side ydet en meget betydelig Indsats, hvilket jeg nærmere skal belyse ved nogle faa historiske Bemærkninger, særlig om de ældste Arbejder i denne Retning.

I Begyndelsen klarede man sig med at bestemme Ledningsantallene rent erfaringsmæssigt eller anvendte ret ufuldkomne empiriske Formler uden nærmere Fastsættelse af, hvilken Godhedsgrad der opnaaedes for Trafikens Gennemførelse.

Fortjenesten af at have indført sandsynlighedsteoretiske Metoder ved Behandlingen af Telefontrafikproblemer tilkommer Telefondirektør, Dr. techn. *F. Johannsen*, som i 1907 og 1908 offentliggjorde 2 smaa Afhandlinger, hvoraf den første behandler Spørgsmaalet om Ventetider ved Opkald til manuelle Centralborde for Abonnenter, dels naar kun 1 Telefonistinde kan besvare Opkaldene, og dels naar man kan regne med Samarbejde mellem Nabotelefonistinder, medens den anden Afhandling undersøger, hvor ofte man faar meldt »Optaget« til Abonnenter med 1 eller flere Ledninger. I begge Afhandlinger løses de stillede Opgaver ved Sandsynlighedsregningens Hjælp paa en simpel og tilnærmelsesvis rigtig Maade.

Disse Arbejder vakte Interesse for Sagen, baade herhjemme og i Udlandet, og allerede i 1909 offentliggjorde Kjøbenhavns Telefonselskabs videnskabelige Medarbejder, Magister *A. K. Erlang*, sit første Arbejde paa dette Omraade, hvori han udleder Fordelingsloven for tilfældig fordelte Telefonopkald, samt giver den exakte Løsning af det af Direktør Johannsen behandlede Ventetidsproblem for det simpleste Tilfælde, hvor kun 1 Telefonistinde besvarer Opkaldene.

Det første betydelige Arbejde over Beregning af Lednings- og Vælgerantal er Overingeniør ved Kjøbenhavns Telefonselskab *P. V. Christensens* Afhandling fra 1913 med Titlen: »Antallet af Vælgere i automatiske Telefoncentraler«, hvori Overingeniør Christensen som den første behandler disse Problemer ved Sandsynlighedsregningens Hjælp og bl. a. fremsætter sin Formel for Beregning af Ledningsantal, den saakaldte Kvadratrodsformel, der er fortræffelig egnet til Anvendelse i Praksis.

I 1917 offentliggjorde *Erlang* sit betydeligste Arbejde, der indeholder Resultaterne af en exakt Behandling af baade Ventetids- og Afvisningsproblemer, heriblandt den berømte B-Formel, der utvivlsomt er den mest anvendte Formel til Beregning af Ledningsantal; det kan eksempelvis nævnes, at *Post Office* i England allerede i 1920 accepterede Erlangs B-Formel som Beregningsbasis.

I de følgende Aar kom flere andre værdifulde Arbejder, baade fra *Erlangs* Haand og fra anden Side; jeg skal blot nævne *O'Dell* i England og *Molina* i Amerika.

Blandt Forfattere, der efter Erlangs Død i 1929 har leveret betydelige teoretiske Arbejder, kan nævnes Navne som *C. D. Crommelin* i England, *Conny Palm* i Sverige og *F. Pollaczek* i Tyskland.

2. Sandsynlighedsregning.

Selv om jeg forudsætter Sandsynlighedsregningens Elementer bekendte, skal jeg dog ganske kort erindre om Grundreglerne for Regning med Sandsynlighedsstørrelser.

Definition af matematisk Sandsynlighed. Vèd man, at der ved en vis Lejlighed maa indtræffe et af m forskellige Tilfælde, der alle er *lige mulige*, og hvoraf de g Tilfælde medfører en vis Begivenhed A, er Sandsynligheden for, at A indtræffer:

$$p = \frac{g}{m} = \frac{\text{Antal gunstige Tilfælde}}{\text{Antal mulige Tilfælde.}}$$

Af Definitionen følger, at en Sandsynlighed altid maa ligge mellem Grænserne 0, der betyder Umulighed, og 1, der betyder Vished. Definitionen udvides uden Vanskelighed til at gælde for kontinuerte Størrelser, idet blot Summerne g og m erstattes af Integraler. I Praksis angives Sandsynligheder ofte i Promille.

For Regning med Sandsynligheder gælder følgende 2 Grundregler:

Additionsreglen. Har 2 Begivenheder A og B, der *udelukker hinanden*, d. v. s. ikke kan indtræffe samtidig, henholdsvis Sandsynlighederne p og q, vil Sandsynligheden for, at *enten* A *eller* B indtræffer, være $p + q$. Heraf

følger umiddelbart, at Summen af Sandsynlighederne for samtlige mulige forskellige Tilfælde er lig 1.

Multiplikationsreglen. Har 2 Begivenheder A og B, der er *indbyrdes uafhængige,* henholdsvis Sandsynlighederne p og q, vil Sandsynligheden for, at *baade* A *og* B indtræffer, være p . q.

Store Tals Lov. Ved Hjælp af disse Grundregler udledes »de store Tals Lov«, hvis væsentligste Indhold er følgende: Gør man et Antal »Forsøg«, hvor Begivenheden A i hvert Forsøg har den samme Sandsynlighed p, kan man ved at gentage Forsøget tilstrækkelig mange Gange sikre sig, at den gennemsnitlige relative Hyppighed for alle »Forsøgene« af Begivenheden A's Indtræffen afviger saa lidt, man selv ønsker det, fra Sandsynligheden p. Sandsynligheden p bliver derfor identisk med den relative Hyppighed for et uendelig stort Antal Gentagelser.

At denne »Store Tals Lov« virkelig, saaledes som *Erfaringen* viser, gælder for reale Forhold, danner Grundlaget for den praktiske Anvendelse af Sandsynlighedsregningen.

3. Fordelingslove.

Kan en variabel Størrelse x antage alle Værdier i Intervallet x = a til x = b, saaledes at p(x) . dx angiver Sandsynligheden for, at den variable antager Værdien x, nøjagtigere udtrykt: ligger mellem x og x + dx, kaldes p(x) *Fordelingsloven* for den variable x, jævnf. Fig. 1. I Overensstemmelse med Additionsreglen gælder, at $\int_a^b p(x)dx = 1$. »*Middelværdien*« m af x defineres ved:

$$m = \int_a^b x \cdot p(x)\,dx.$$

Som et illustrerende Eksempel kan betragtes Længden af Telefonsamtaler. Samtalelængden, udtrykt f. Eks. i Sekunder, kan antage alle Værdier fra Nul og ubegrænset opefter, men de forskellige Samtalelængder optræder med forskellige relative Hyppigheder eller Sandsynligheder, og disse Sandsynligheder danner Samtalelængdens Fordelingslov. »Middelværdien« eller »Gennemsnitsværdien« af Samtalelængden for et stort Antal Samtaler faas da som Summen af alle de forskellige Samtalelængder multipliceret med deres respektive relative Hyppigheder eller Sandsynligheder.

Hvor der i det følgende omtales Middelværdier af Trafikstørrelser og Ventetider, er disse i Overensstemmelse med de store Tals Lov altid at opfatte paa denne Maade som Middelværdien for et meget stort Antal.

Som et Maal for, hvorledes den variable x fordeler sig omkring Middelværdien m, benyttes »*Spredningen*« σ, defineret ved:

$$\sigma^2 = \int_a^b (x - m)^2 \cdot p(x)dx \cdot$$

Betydningen af Spredningen σ er den, at man med en vis Sikkerhed, d. v. s. en vis Sandsynlighed, kan regne, at Afvigelserne af den variable x fra Middelværdien m ikke overskrider k . σ, hvor Konstanten k afhænger dels af den ønskede Sikkerhed og dels af Fordelingslovens Form. F. Eks. gælder for Størrelser, der følger den velkendte Gauss'ske Fejllov, at Sandsynligheden for Afvigelser fra Middelværdien større end 3 Gange Spredningen kun er ca. 3 ‰.

Kan x kun antage visse Værdier $x_1, x_2, \ldots x_n$, henholdsvis med Sandsynlighederne $p_1, p_2 \ldots p_n$, hvor $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, faas for Middelværdien m og Spredningen σ:

$$m = \sum_{r=1}^{n} x_r \cdot p_r \text{ og } \sigma^2 = \sum_{r=1}^{n} (x_r - m)^2 \cdot p_r .$$

4. Travl Time. Trafikintensitet.

Kurven paa Fig. 2, der angiver Antallet af Opkald pr. Time for en Gruppe Abonnenter, f. Eks. alle Abonnenterne paa en Central, er et typisk Eksempel paa, hvorledes Opkaldene fordeler sig over Dagens Timer. Som det fremgaar af Kurven, har Antallet af Opkald et Maximum om Formiddagen; der findes her en Periode paa 1 à 2 Timer, hvor Tilstanden kan betragtes som *stationær,* idet Trafiken hverken viser Tendens til at stige eller dale. Antallet af Opkald i Dagens forskellige Timer varierer dels med Ugedagene, idet Trafiken er betydelig mindre paa Søn- og Helligdage end paa Hverdage, og dels med Aarstiden. Som Beregningsbasis for Lednings- og Vælgerantal benyttes almindeligt et Gennemsnit af den travleste Time paa Hverdage i de travle Maaneder, og man bestemmer Ledningsantallene saaledes, at Trafik af Størrelse bestemt ved denne gennemsnitlige »*travle Time*« afvikles med en passende Godhedsgrad.

Størrelsen af den Trafik, der belaster et Ledningsbundt eller en Vælgergruppe, afhænger ikke alene af Antallet af Opkald, men ogsaa af den Tid, hvert Opkald optager en Ledning eller Vælger, hvilken Tid vi betegner som *Samtalelængden.* Vi forudsætter, at Tilstanden er stationær, saaledes som det er Tilfældet i den travle Time. Ved »*Trafikintensiteten*« *y* forstaas da det gennemsnitlige Antal Opkald pr. Tidsenhed multipliceret med den gennemsnitlige Samtalelængde udtrykt i samme Tidsenhed. Som det umiddelbart fremgaar af denne Definition, er det ligegyldigt, hvilken Tidsenhed, man anvender; ofte benyttes Tidsenheden 1 Time, men særlig simpelt er det at benytte den gennemsnitlige Samtalelængde som Tidsenhed, altsaa:

Trafikintensitet y = Gnsn. Antal Opkald pr. Time × Middelsamtalelængde i Timer = Gnsn. Antal Opkald pr. Middelsamtalelængde.

I det følgende vil vi stedse holde os til denne sidste Definition, altsaa anvende Middelsamtalelængden som Tidsenhed.

Foruden y anvendes forskellige andre Maal for Trafikintensiteten, der alle er lig med y-Værdien multipliceret med en Konstant. Jeg skal kun omtale Begrebet *Sm,* »*Samtaleminutter*«, der er indført af Overingeniør Christensen, og som er almindeligt anvendt i Praksis; herved forstaas: *Sm = Gnsn. Antal Opkald pr. Time × Middelsamtalelængde i Minutter,* hvoraf ved Sammenligning med det første Udtryk for y fremgaar, at Sm-Værdien er 60 Gange y-Værdien. F. Eks. betegner y = 10 og Sm = 600 den samme Trafikmængde, nemlig 10 Opkald pr. Middelsamtalelængde.

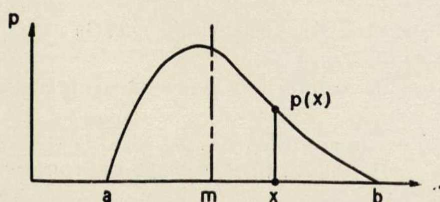


Fig. 1.

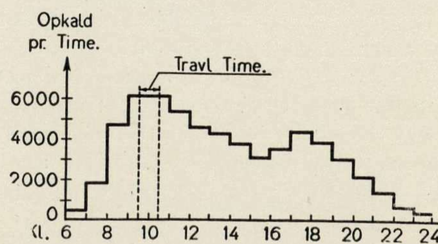


Fig. 2.

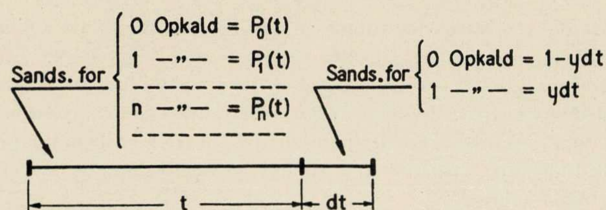


Fig. 3.

5. Afvisning.

Vi betragter nu et *simpelt Ledningsbundt*, d. v. s. et Antal Ledninger, der samarbejder saaledes, at ethvert Opkald til Ledningsbundtet kan søge ind paa en vilkaarlig af de ledige Ledninger, og antager, at Ledningsbundtet er belastet med en Trafik af Størrelsen y. Hvis Ledningsbundtet er saa stort, at ethvert Opkald straks finder en ledig Ledning, er det uden videre klart, at det gennemsnitlige Antal samtidig optagne Ledninger bliver lig med y, idet jo y er det gennemsnitlige Antal Opkald pr. Middelsamtalelængde. Ved de i Praksis anvendte Ledningsbundter med et begrænset Antal Ledninger vil imidlertid en Del af Opkaldene indtræffe paa Tidspunkter, hvor alle Ledninger er optaget, og, alt efter Telefonsystemets Indretning, maa disse Opkald da enten *vente* paa en ledig Ledning, eller de bliver *afvist*, d. v. s. de faar et Optagetsignal og gaar tabt.

I Afvisningssystemer er »*Afvisningen*«, d. v. s. det relative Antal afviste Opkald, altsaa den Del af Opkaldene, der indtræffer, naar alle Ledninger er optaget, og er derfor identisk med Sandsynligheden for, at alle Ledninger i Bundtet er optaget; for Afvisningen har Erlang indført Betegnelsen B (»Blokade«). Antallet af afviste Opkald pr. Tidsenhed er y . B, medens den »*gennemførte Trafik*«, d. v. s. den Trafik, der virkelig føres igennem Ledningsbundtet, bliver y. (1—B). For de fleste Ledningsbundter og Vælgergrupper holdes B nede paa en Værdi af nogle faa Promille, og den gennemførte Trafik, som er den Størrelse, der er direkte tilgængelig for Maaling, er da meget nær lig med Trafikintensiteten.

6. Opkaldenes Fordelingslov.

For at kunne anvende Sandsynlighedsregningen paa Telefontrafikproblemer maa vi kende Fordelingsloven for Opkaldene. Den Forudsætning, der i langt de fleste Tilfælde, hvor Trafiken stammer fra et stort Antal indbyrdes uafhængige Abonnenter, er i Overensstemmelse med Virkeligheden, er den, at Opkaldene indtræffer rent tilfældigt, uafhængige af hinanden. Denne Forudsætning udtrykkes sandsynlighedsteoretisk saaledes:

Sandsynligheden for, at der indtræffer 1 Opkald i den uendelig lille Tid dt, er y . dt, uafhængig af, paa hvilket Tidspunkt det lille Tidsrum dt ligger.

Heraf følger, at Sandsynlighederne for 2 eller flere Opkald i Tiden dt bliver uendelig smaa af 2' eller højere Orden og derfor kan lades ude af Betragtning i Forhold til y . dt, Sandsynligheden for 1 Opkald. For det uendelig lille Tidsrum dt behøver vi derfor kun at regne med de 2 Muligheder, at der enten indtræffer 1 Opkald, hvilket har den anførte Sandsynlighed y . dt, eller at der intet Opkald indtræffer, hvilket følgelig har Sandsynligheden 1—y . dt. Middelværdien for Antallet af Opkald i Tiden dt bliver derfor 1 . ydt = y . dt, og Middelværdien af Antal Opkald pr. Tidsenhed, d. v. s. pr. Middelsamtalelængde, bliver følgelig y, saa at denne sandsynlighedsteoretiske Formulering er i Overensstemmelse med den i Afsnit 4 givne Definition af Trafikintensiteten y.

For at finde den Fordelingslov for Opkaldene, der resulterer af Forudsætningen om, at Opkaldene indtræffer rent tilfældigt, betragter vi (Fig. 3) et Tidsrum af Længde t, og betegner Sandsynlighederne for, at der i dette Tidsrum indtræffer henholdsvis 0,1,2,....n... Opkald, med $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$....$P_n(t)$... I Forlængelse af Tidsrummet t betragter vi et uendelig kort Tidsrum dt; for dette haves som omtalt kun de 2 Muligheder, at der indtræffer enten 1 eller 0 Opkald, henholdsvis med Sandsynlighederne y . dt og 1—y . dt. Da disse Sandsynligheder ifølge Forudsætningen om Opkaldenes tilfældige Fordeling er uafhængige af, hvor mange Opkald der falder i Tiden t, kan vi anvende Multiplikationsreglen til at finde Sandsynligheden P_n (t+dt) for, at der falder n Opkald i Tiden t+dt, hvilket øjensynligt kun kan ske ved, at der *enten* falder n—1 Opkald i Tiden t og 1 Opkald i Tiden dt *eller* n Opkald i t og 0 Opkald i dt; vi faar altsaa:

$$P_n(t+dt) = P_{n-1}(t)\cdot y\cdot dt + P_n(t)\cdot(1-y\cdot dt).$$

hvoraf:

$$\frac{P_n(t+dt)-P_n(t)}{dt} = \frac{d\,P_n(t)}{dt} = y\cdot P_{n-1}(t) - y\cdot P_n(t).$$

Til Bestemmelse af Sandsynlighederne $P_0(t)$, $P_1(t)$,... $P_n(t)$ ... faas herved følgende System af Differentialligninger:

$$\frac{d\,P_0(t)}{dt} = -y\cdot P_0(t)$$

$$\frac{d\,P_1(t)}{dt} = y\cdot P_0(t) - y\cdot P_1(t)$$

....

$$\frac{d\,P_n(t)}{dt} = y\cdot P_{n-1}(t) - y\cdot P_n(t)$$

....

Heraf findes ved successiv Integration, idet de arbitrære Konstanter bestemmes derved, at for t = 0 haves $P_0(o) = 1$ og de øvrige $P_n(o) = 0$:

$$P_0(t) = e^{-yt}, P_1(t) = yt\cdot e^{-yt}, \ldots P_n(t) = \frac{(yt)^n}{n!}\cdot e^{-yt}, \ldots$$

Ved heri at sætte t = 1 faas Fordelingsloven for Antallet af Opkald pr. Middelsamtalelængde:

$$P_0 = e^{-y}, P_1 = y\cdot e^{-y}, \ldots P_n = \frac{y^n}{n!}\cdot e^{-y}, \ldots$$

Denne Fordelingslov er kendt fra Statistikens Teori under Navnet »*Poissons Lov*«; at den gælder for tilfældig fordelte Punkter, specielt Telefonopkald, er bevist af *Erlang* i 1909. Fig. 4 illustrerer Poissons Fordelingslov for y = 10.

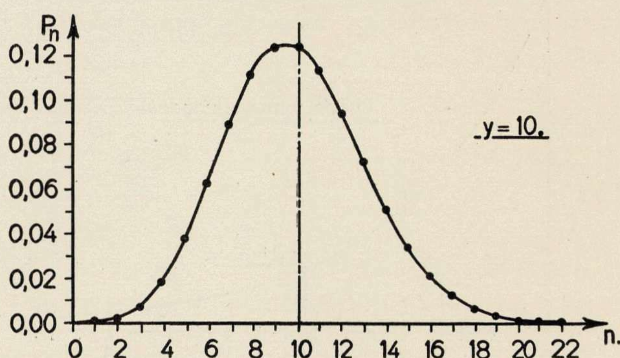


Fig. 4.

Det verificeres let, at Poissons Lov virkelig er en Fordelingslov med Middelværdien y, idet man finder:

$$\sum_{n=o}^{\infty} P_n = e^{-y} \cdot \sum_{n=o}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = e^{-y} \cdot e^y = 1.$$

og

$$m = \sum_{n=o}^{\infty} n \cdot P_n = e^{-y} \cdot \sum_{n=o}^{\infty} n \cdot \frac{y^n}{n!} = e^{-y} \cdot y \cdot e^y = y.$$

7. Tilnærmelsesformel for Afvisningen.

For et Ledningsbundt med uendelig mange Ledninger, hvor ethvert Opkald straks finder en ledig Ledning, er det umiddelbart indlysende, at Sandsynligheden for at finde n Ledninger optaget samtidig er den samme som Sandsynligheden for at faa n Opkald pr. Middelsamtalelængde, d. v. s. de Poisson'ske Funktioner P_0, P_1 ... P_n ... angiver ogsaa Sandsynlighederne for 0, 1,...n... optagne Ledninger i et uendelig stort Ledningsbundt, der er belastet med Trafiken y.

Dette kan benyttes til en tilnærmet Beregning af Afvisningen for et virkeligt Ledningsbundt med x Ledninger og Trafik y udfra følgende Ræsonnement: Afvisningen B er identisk med Sandsynligheden for at finde alle x Ledninger optaget, hvilket omtrentlig maa være det samme som Sandsynligheden for i et uendelig stort Ledningsbundt med samme Trafik y at finde *mindst* x Ledninger optaget; vi faar altsaa med Tilnærmelse:

$$B \sim P_x + P_{x+1} + P_{x+2} + \ldots = \sum_{n=x}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \cdot e^{-y}.$$

Denne gamle Tilnærmelsesformel, der først er anvendt af *Erlang,* benyttes endnu almindeligt til Ledningsberegning i Amerika. Af Formlen kan beregnes den ene af de 3 Størrelser x, y og B, naar de 2 andre er givne; f. Eks. kan beregnes det nødvendige Ledningsantal x, naar Trafiken y og den tilladte Afvisning B er givet. Formlen giver en nogenlunde brugbar Tilnærmelse til de rigtige Værdier, men bestemmer Ledningsantallet noget større end nødvendigt for en given Afvisning.

8. Christensen-Formlen.

Ud fra den Poisson'ske Fordelingslov kan endvidere udledes en Formel til Ledningsberegning af en anden Karakter, nemlig den af Overingeniør *P. V. Christensen* opstillede Kvadratrodsformel. Som omtalt i Afsnit 3 gælder for en Størrelse, der følger en Fordelingslov, at man med en vis Sandsynlighed, afhængig af Konstanten k, kan forvente, at Størrelsen ikke afviger mere end $k \cdot \sigma$ fra Middelværdien, hvor σ er Fordelingslovens Spredning. Den Poisson'ske Fordelingslov for Antallet af Opkald pr. Middelsamtalelængde har Middelværdien y, og for Spredningen findes:

$$\sigma^2 = \sum_{n=o}^{\infty} (n - y)^2 \cdot P_n = e^{-y} \cdot$$

$$\left(\sum_{n=o}^{\infty} n^2 \cdot \frac{y^n}{n!} - 2y \cdot \sum_{n=o}^{\infty} n \cdot \frac{y^n}{n!} + y^2 \cdot \sum_{n=o}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right)$$

$$= e^{-y} \cdot \left((y + y^2) \cdot e^y - 2y \cdot y \cdot e^y + y^2 \cdot e^y \right) = y,$$

altsaa: $\sigma = \sqrt{y}$.

Dette vil sige, at Sandsynligheden for, at Antallet af Opkald pr. Middelsamtalelængde overskrider Værdien $y + k\sqrt{y}$ kan fastsættes til en passende lille Værdi ved passende Valg af Konstanten k; man finder, at for $k = 3$ à 3,5 vil Sandsynligheden for Overskridelse kun blive nogle faa Promille.

Bestemmer man derfor Ledningsantallet x saaledes, at:

$$x = y + k\sqrt{y},$$

med $k = 3{,}0$ à 3,5, vil kun nogle Promille af Opkaldene finde alle x Ledninger optaget og blive afvist.

Det bemærkes, at den Værdi af k, der svarer til en bestemt Afvisning, f. Eks. $B = 2^0/_{00}$, varierer noget med Trafiken y; en passende Fastsættelse af Størrelsen af k sker bedst ved Sammenligning med Erlangs B-Formel.

9. Samtalelængdens Fordelingslov.

Det har vist sig, at Længden af normale indenbys Samtaler, der ikke takstmæssigt eller paa anden Maade er tidsbegrænsede, følger den paa Fig. 5 viste Fordelingslov, hvor Sandsynligheden for Samtalelængden t, eller nøjagtigere udtrykt for en Samtalelængde mellem t og $t + dt$, er $p(t)dt = e^{-t} \cdot dt$, idet vi stadig benytter Middelsamtalelængden som Tidsenhed. Det verificeres let, at:

$$\int_o^{\infty} e^{-t} \cdot dt = 1, \text{ og } m = \int_o^{\infty} t \cdot e^{-t} \cdot dt = 1.$$

At Samtalelængderne virkelig ret nøje følger denne Fordelingslov fremgaar af Maalinger foretaget ved Kjøbenhavns Telefonselskab omkring 1916, og er senere fundet bekræftet ved udenlandske Maalingsresultater.

Denne Fordelingslov har en for den sandsynlighedsteoretiske Behandling vigtig Egenskab, der forøvrigt kan opfattes som Aarsagen til, at Samtalelængden følger netop denne Fordelingslov, nemlig den Egenskab, at Sandsynligheden for, at en Samtale vil ophøre i næste Øjeblik, nøjagtigere udtrykt i Løbet af den følgende uendelig korte Tid dt, er *uafhængig af Samtalens Alder,* d. v. s. af den Tid, Samtalen hidtil har varet. Af Fordelingsloven faas nemlig, at Sandsynligheden for, at en Samtale *mindst* opnaar Alderen t, er:

$$P(t) = \int_t^{\infty} e^{-t} \cdot dt = e^{-t},$$

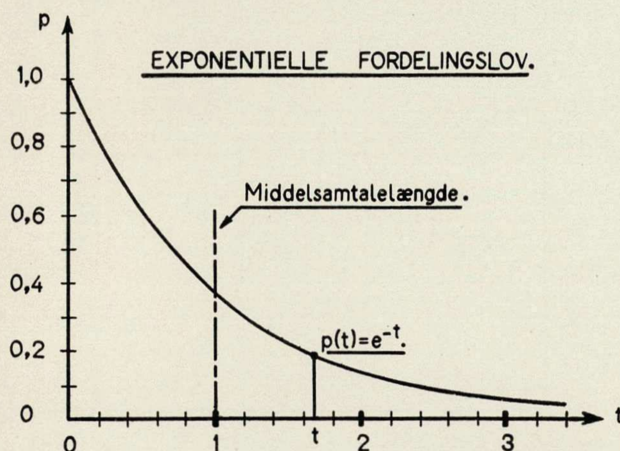


Fig. 5.

og Sandsynligheden for, at den ophører mellem t og $t + dt$, er jo $p(t)dt = e^{-t} \cdot dt$; Forholdet herimellem, altsaa:

$$\frac{p(t)\,dt}{P(t)} = \frac{e^{-t} \cdot dt}{e^{-t}} = 1 \cdot dt$$

angiver Sandsynligheden for, at en Samtale, der har naaet Alderen t, ophører i den følgende Tid dt, og er altsaa, som det fundne Udtryk viser, uafhængig af t. Som det let vises, er denne Fordelingslov den eneste, der har denne Egenskab.

Denne saakaldte *»exponentielle Fordelingslov«* gælder som sagt for normale indenbys Samtaler. For udenbys Samtaler, der takstmæssigt er begrænset til en Periode af f. Eks. 3 Minutter, bliver Fordelingsloven anderledes, og man kan undertiden som en grov Tilnærmelse regne med, at Samtalelængden er *konstant*.

10. Erlangs B-Formel.

Vi gaar nu over til for Afvisningssystemer at omtale den exakte Beregning af Afvisningen B for et Ledningsbundt med x Ledninger belastet med Trafiken y. Vi forudsætter, at Opkaldene er *tilfældig fordelt*, samt at Samtalelængden følger den *exponentielle Fordelingslov*. Ledningsbundtet kan befinde sig i x+1 forskellige Tilstande, idet der kan være 0,1,2...x Ledninger optaget, og Sandsynlighederne herfor betegner vi henholdsvis $P_0, P_1, P_2 \ldots P_x$. Vi begrænser os som hidtil til en Periode, hvor Trafikforholdene er stationære (jævnf. Afsnit 4), og Sandsynlighederne $P_0, P_1 \ldots P_x$ vil da være konstante, uafhængige af Tiden, hvilket man udtrykker ved at sige, at Systemet befinder sig i *statistisk Ligevægt*.

Vi betragter nu Ledningsbundtet i en uendelig kort Tid dt. (Fig. 6). Vi ved da (jævnf. Afsnit 6 og 9), at i Tiden dt kan Systemets Tilstand kun forandres ved, at der enten indtræffer et nyt Opkald, eller en bestaaende Samtale ophører, idet Sandsynligheden for, at der sker mere end een Forandring i Tiden dt, bliver uendelig lille af højere Orden. Sandsynligheden for, at der indtræffer 1 Opkald i Tiden dt er $y \cdot dt$, uafhængig af Tilstanden ved Begyndelsen af dt, medens Sandsynligheden for, at en bestaaende Samtale ophører i Tiden dt, er dt, uafhængig af Samtalens Alder; er der n Ledninger optaget ved Begyndelsen af dt, vil derfor ifølge Additionsreglen Sandsynligheden for, at en vilkaarlig af disse n Samtaler ophører i Tiden dt, blive $n \cdot dt$.

Vi antager nu, at der ved Slutningen af dt er n Ledninger optaget, Sandsynlighed derfor P_n. Der er da kun følgende 3 Muligheder for, at dette kan finde Sted:

1. Ved Begyndelsen af dt var n—1 Ledninger optaget, Sandsynlighed herfor P_{n-1}, og i Løbet af dt er indtruffet 1 Opkald, Sandsynlighed herfor $y \cdot dt$.

2. Ved Begyndelsen af dt var n Ledninger optaget, Sandsynlighed herfor P_n, og i Løbet af dt er der hverken kommet et nyt Opkald eller forsvundet nogen af de bestaaende n Samtaler, Sandsynlighed herfor $1 - (ydt + ndt)$.

3. Ved Begyndelsen af dt var $n + 1$ Ledninger optaget, Sandsynlighed herfor P_{n+1}, og i Løbet af dt er 1 af de bestaaende $n + 1$ Samtaler ophørt. Sandsynlighed herfor $(n + 1) \cdot dt$.

Vi faar altsaa følgende Udtryk for Sandsynligheden P :

$$P_n = P_{n-1} \cdot ydt + P_n \cdot (1 - (y + n)dt) + P_{n+1} \cdot (n + 1)\,dt,$$

hvoraf:

$$(n+1) \cdot P_{n+1} = (y+n) \cdot P_n - y \cdot P_{n-1}.$$

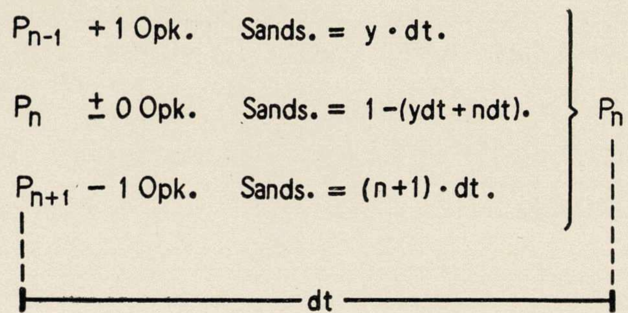


Fig. 6.

Ved heri at sætte $n + 1 = 1,2...x$ faas følgende Ligningssystem for den statistiske Ligevægt:

$$P_1 = y \cdot P_o.$$
$$2 \cdot P_2 = (y + 1) \cdot P_1 - y \cdot P_o.$$
$$\ldots\ldots$$
$$x \cdot P_x = (y + x - 1) \cdot P_{x-1} - y \cdot P_{x-2}.$$

Heraf findes successive $P_1, P_2 \ldots P_x$ udtrykt ved P_o:

$$P_1 = y \cdot P_o, P_2 = \frac{y^2}{2} \cdot P_o \ldots P_n = \frac{y^n}{n!} \cdot P_o \ldots P_x = \frac{y^x}{x!} \cdot P_o.$$

Da Summen af Sandsynlighederne for alle de mulige Tilstande skal være 1, haves:

$$P_o + P_1 + P_2 + \ldots + P_x = 1,$$

hvilket giver det søgte Resultat:

$$P_o = \frac{1}{1 + y + \frac{y^2}{2} + \ldots + \frac{y^x}{x!}}$$

$$\ldots\ldots$$

$$P_n = \frac{\frac{y^n}{n!}}{1 + y + \frac{y^2}{2} + \ldots + \frac{y^x}{x!}}$$

$$\ldots\ldots$$

$$B = P_x = \frac{\frac{y^x}{x!}}{1 + y + \frac{y^2}{2} + \ldots + \frac{y^x}{x!}}$$

Disse fundamentale Formler er fundet af *Erlang* og offentliggjort i 1917. Den sidste Formel er den berømte *B-Formel* for Afvisningen, idet jo Afvisningen B er identisk med Sandsynligheden P_x for, at alle x Ledninger er optaget (jævnf. Afsnit 5).

Af Udtrykket for P_n ses, at for $x \to \infty$ vil $P_n \to \frac{y^n}{n!} \cdot e^{-y}$ i Overensstemmelse med de i Afsnit 7 fundne Resultater for et uendelig stort Ledningsbundt.

Ved Udledelsen af de Erlangske Formler forudsatte vi, at Samtalelængden følger den exponentielle Fordelingslov. Det har imidlertid vist sig, at denne Indskrænkning er unødvendig. Hvis Samtalelængden følger en vilkaarlig anden Fordelingslov, er Sandsynligheden for, at en Samtale ophører i Tiden dt, *afhængig* af Alderen af de Samtaler, der bestaar ved Begyndelsen af dt, og Behandlingen af dette almindeligere Tilfælde støder paa store Vanskeligheder. *F. Pollaczek* har behandlet Spørgsmaalet i 1932 i en omfangsrig Afhandling, hvor han med Anvendelse af et kolossalt matematisk Apparat har bevist, at de Erlangske Formler ogsaa er gyldige, naar Samtalelængdens Fordelingslov tilhører visse Klasser af Funktioner. Først i den seneste Tid, i 1938, er det lykkedes *Conny Palm* at give et Bevis for, at de Erlangske Udtryk virkelig er gyl-

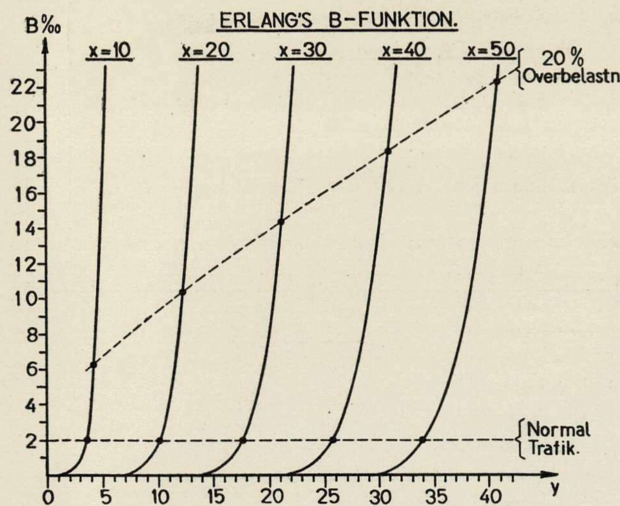


Fig. 7.

dige, uanset hvilken Fordelingslov Samtalelængden følger; Palm's Behandlingsmaade er langt simplere end Pollaczek's, men Bevisførelsen er dog meget omstændelig.

11. Kurver for Erlangs B-Formel.

Kurverne paa Fig. 7 viser Forløbet af den Erlangske B-Funktion for Ledningsantallene x = 10, 20, 30, 40, 50. Det fremgaar af disse Kurver, at Afvisningen B er praktisk talt Nul indtil en vis Værdi af Trafiken y, hvorefter B vokser hurtigt. For B = 2‰ er nogle sammenhørende Værdier af x, y og $\frac{y}{x}$ angivet i hosstaaende Tabel, hvoraf ses, at $\frac{y}{x}$, den gennemsnitlige Trafik pr. Ledning, vokser stærkt med Ledningsantallet; f. Eks. er for x = 5 Ledninger $\frac{y}{x} = 0.180$, hvilket vil sige, at Ledningerne gennemsnitlig kun er optaget 18 % af Tiden eller ca. 11 Minutter pr. Time, medens det tilsvarende Tal for et Bundt paa 50 Ledninger er ca. 41 Minutter pr. Time. Det er derfor af stor økonomisk Betydning saavidt muligt at samle Trafiken i store Ledningsbundter.

B = 2‰

x	y	y/x	Ledn. Arbejdstid pr. Time Min.
5	0.90	0.180	10.8
10	3.43	0.343	20.6
20	10.07	0.504	30.2
30	17.61	0.587	35.2
40	25.60	0.640	38.4
50	33.88	0.678	40.7

Af Kurverne fremgaar endvidere en anden Ting, nemlig de forskellige Ledningsbundters Følsomhed for Overbelastning. Hvis f. Eks. Ledningsbundterne er beregnet saaledes, at de giver B = 2‰ Afvisning i normal travl Time, og Trafiken af en eller anden særlig Grund vokser til 20 % over normal Trafik, vil man for de forskellige Ledningsbundter faa de paa Fig. 7 indtegnede Punkter; f. Eks. vokser Afvisningen for et 10-Ledningsbundt kun til 6,3 ‰, men for et 50-Ledningsbundt til 22,3 ‰. Den større Udnyttelsesgrad af Ledningerne i store Bundter medfører altsaa en forøget Følsomhed for Overbelastning.

Til Bestemmelse af Ledningsantal i Praksis benyttes almindeligt Kurver som de paa Fig. 8 viste, hvor Koordinaterne er Ledningsantallet x og Trafiken y, medens hver Kurve svarer til en bestemt Værdi af Afvisningen B. Sædvanlig lægges Trafiken i den gennemsnitlige »travle Time« til Grund for Beregningen, jævnf. Afsnit 4. Den hyppigst anvendte Værdi af den tilladte Afvisning for Vælgere i Centraler og indenbys Centralledningsbundter mellem automatiske Centraler er B = 2‰, ikke alene herhjemme, men ogsaa i f. Eks. England og Sverige.

12. »Forbedrings«-Kurver.

Der kan imidlertid gøres visse Indvendinger imod den almindelige Praksis at beregne Ledningsantallene i Afvisningssystemer efter faste Værdier af Afvisningen B. For det første beror Fastsættelsen af den Afvisning, der bør tillades i forskellige Tilfælde, i nogen Grad paa et vilkaarligt Skøn. For det andet er smaa Ledningsbundter dyrere end store Bundter i Forhold til den Trafik, de fører, og desuden mindre følsomme for Overbelastning, hvilke Omstændigheder begge taler for at tillade noget større Afvisning paa smaa Bundter end paa store.

En Hensyntagen til disse Indvendinger kan opnaas ved som Beregningsbasis at benytte de saakaldte »Forbedrings«-Kurver, som faas ved følgende Betragtning.

Har vi et Bundt paa x-1 Ledninger med Trafiken y, er Antallet af afviste Opkald pr. Tidsenhed:

$$y \cdot B_{x-1} = y \cdot \frac{\frac{y^{x-1}}{(x-1)!}}{1 + y + \cdots + \frac{y^{x-1}}{(x-1)!}}$$

Tilføjer vi nu 1 Ledning, saa at Ledningsantallet bliver x, reduceres Antallet af afviste Opkald til:

$$y \cdot B_x = y \cdot \frac{\frac{y^x}{x!}}{1 + y + \cdots + \frac{y^x}{x!}}$$

Oprettelsen af den x'te Ledning har altsaa formindsket Antallet af afviste Opkald pr. Tidsenhed med:

$$F_x = y \cdot (B_{x-1} - B_x),$$

hvilken Størrelse betegnes som »*Forbedringen*« for den x'te Ledning.

Er Prisen for en Ledning L Kr., vil $Ø = \frac{F_x}{L}$ være den Formindskelse i Antallet af afviste Opkald, der opnaas for en Udgift paa 1 Kr.

Som Princip for en økonomisk rationel Bestemmelse af Ledningsantal kan nu opstilles den Fordring, at *»Økonomikonstanten« Ø skal være ens for alle Ledningsbundter*, d. v. s. at man i ethvert Ledningsbundt opretter saa

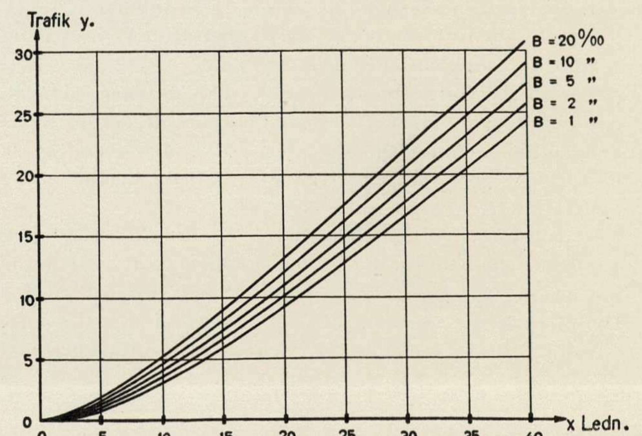


Fig. 8.

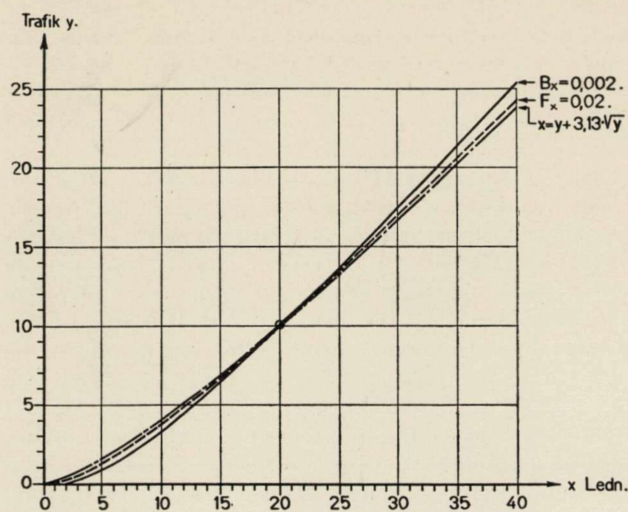


Fig. 9.

mange Ledninger, at man for Forbedringen ved Oprettelsen af den sidste, x'te Ledning faar $F_x = \emptyset \cdot L$, hvor Ø er en fast Konstant.

Dette Princip for Beregning af Ledningsantal er i 1924 opstillet af Afdelingsingeniør *K. Moe* ved Kjøbenhavns Telefonselskab og udviklet i Samarbejde med Magister *Erlang*.

Den punkterede Kurve paa Fig. 9 er et Eksempel paa en saadan F-Kurve, svarende til Værdien F = 0.02; for denne Værdi skærer F-Kurven B = 2⁰/₀₀-Kurven i Punktet x = 20.

Som det fremgaar af Fig. 9, giver F-Kurverne en noget større Afvisning paa smaa Bundter end paa store.

13. Kurver for Christensen-Formlen.

Den stiplede Kurve paa Fig. 9 fremstiller Overingeniør *Christensens* Formel $x = y + k\sqrt{y}$ for k = 3,13, hvilken Værdi af k giver Afvisningen B = 2⁰/₀₀ for et Bundt paa 20 Ledninger.

Som det ses, giver denne Kurve ligesom F-Kurven større Afvisning paa smaa Bundter end paa store, og gaar endda lidt videre i denne Retning end F-Kurven.

14. Trafiken paa hver Ledning.

Ved Udledelsen i Afsnit 10 af de Erlangske Udtryk for »Tilstands-Sandsynlighederne« for 0,1,2 . . . x optagne Ledninger i et Bundt paa x Ledninger var det ikke nødvendigt at forudsætte noget om, hvorledes Trafiken fordeler sig over de enkelte Ledninger, og dette er derfor uden Indflydelse paa de nævnte Sandsynligheder. I Praksis kan man indrette sig paa forskellige Maader, idet man enten kan lade alle de Vælgere, der fører Trafik til det paagældende Ledningsbundt, søge over Ledningerne i en bestemt Rækkefølge saaledes, at en bestemt Ledning altid er den første, hvilket naturligvis medfører, at de første Ledninger faar væsentlig mere Trafik end de sidste Ledninger, eller man kan forbinde Vælgermultiplerne saaledes, at Vælgerne deles i Grupper, der faar hver sin Ledning som første Ledning; ved denne Fremgangsmaade, der betegnes som »Revolvering«, opnaas en Udjævning af Trafiken paa de enkelte Ledninger.

I førstnævnte Tilfælde, hvor Ledningerne afsøges i en bestemt Rækkefølge, bliver det Antal Opkald pr. Tidsenhed, der finder de n-1 første Ledninger optaget:

$$y \cdot B_{n-1} = y \cdot \frac{\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}}{1 + y + \dots + \frac{y^{n-1}}{(n-1)!}},$$

medens det Antal Opkald, der finder de n første Ledninger optaget, bliver:

$$y \cdot B_n = y \cdot \frac{\frac{y^n}{n!}}{1 + y + \dots + \frac{y^n}{n!}}$$

Forskellen herimellem, altsaa:

$$\alpha_n = y \cdot (B_{n-1} - B_n)$$

er det Antal Opkald pr. Tidsenhed, d.v.s. pr. Middelsamtalelængde, der søger ind paa den n'te Ledning, altsaa Trafiken paa den n'te Ledning, eller anderledes udtrykt, den Del af Tiden, den n'te Ledning er i Brug, hvilket ogsaa kan betegnes som Ledningens Virkningsgrad. Den almindeligt anvendte Betegnelse α for denne Størrelse er oprindelig indført af Telefondirektør *Johannsen* som Udtryk for Telefonistindernes Optagethedsgrad.

Som det fremgaar af Udtrykket for α_n, er den i Afsnit 12 omtalte »Forbedring« F_x lig med Trafiken paa den sidste, x'te Ledning:

$$F_x = \alpha_x = y \cdot (B_{x-1} - B_x),$$

hvilket er indlysende, da Forbedringen F_x jo betegner den Formindskelse af den afviste Trafik, der opnaas ved Oprettelse af den x'te Ledning.

Fig. 10 viser som Eksempel α for de forskellige Ledninger i et Bundt paa x = 20 Ledninger belastet med Trafiken y = 10, hvilket giver Afvisningen B_x = 1,9 ⁰/₀₀.

Den punkterede Linie angiver α pr. Ledning for »*fuldstændig Revolvering*«, hvor alle Ledningerne fører samme Trafik. Da den gennemførte Trafik er $y \cdot (1-B_x)$, bliver Trafiken pr. Ledning ved fuldstændig Revolvering:

$$\alpha = \frac{y}{x} \cdot (1 - B_x).$$

15. Afvigelser fra tilfældig Opkaldsfordeling.

Ved Udledelsen af Erlangs B-Formel i Afsnit 10 forudsatte vi, at Opkaldene var tilfældig fordelte uafhængig

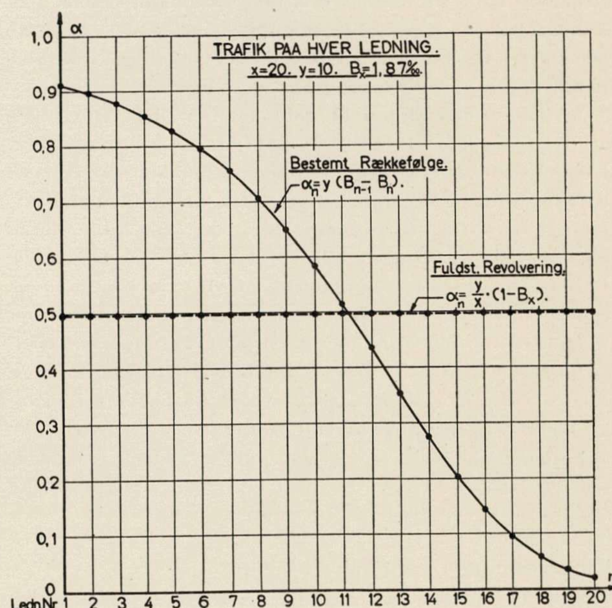


Fig. 10.

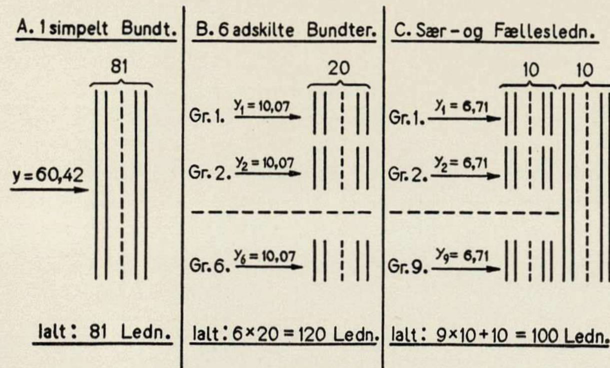


Fig. 11.

af, hvor mange Ledninger der er optaget i Ledningsbundtet, hvilken Forudsætning som nævnt er i udmærket Overensstemmelse med Virkeligheden i langt de fleste praktiske Tilfælde. Der er dog navnlig 2 Aarsager, som kan influere paa den tilfældige Opkaldsfordeling.

Den ene af disse Aarsager er, at Opkaldene stammer fra et begrænset Antal Abonnenter. Da de Abonnenter, som staar i Samtale, ikke kan foraarsage nye Opkald, er det klart, at Opkaldssandsynligheden er proportional med Antallet af ledige Abonnenter. Tages Hensyn hertil ved Opstillingen af den statistiske Ligevægts Ligninger, faas følgende Formel for Afvisningen, idet s er Antallet af Abonnenter:

$$B_x = \frac{s-x}{s} \cdot \frac{\binom{s}{x} \cdot \left(\frac{y}{s}\right)^x}{1 + \binom{s}{1} \cdot \frac{y}{s} + \ldots + \binom{s}{x} \cdot \left(\frac{y}{s}\right)^x},$$

en Formel, der for $s \to \infty$ gaar over i Erlangs B-Formel, og som for endelige Værdier af s giver lidt mindre Værdier for B_x. Det viser sig imidlertid, at Forskellen i de fleste praktiske Tilfælde er ret uvæsentlig, kun for specielle Tilfælde, hvor Trafiken stammer fra en lille Gruppe stærkt talende Abonnenter, bliver Forskellen praktisk mærkbar og tillader en Besparelse i det nødvendige Ledningsantal for en given Afvisning.

Den anden af de Aarsager, der kan influere paa Opkaldsfordelingen, virker til den modsatte Side, altsaa til at gøre Afvisningen større end beregnet efter Erlangs B-Formel. De Abonnenter, der faar et Opkald afvist paa Grund af, at alle Ledninger er optaget, vil som Regel ikke slaa sig til Ro hermed, men gentage Opkaldet, indtil de opnaar den ønskede Forbindelse. Hvis der hengaar en passende Tid, inden Opkaldet gentages, vil dette dog ikke influere paa den tilfældige Fordeling, men blot bevirke, at den Værdi af Trafikintensiteten y, der konstateres ved Trafikmaalinger, og som benyttes til Beregningen af Afvisningen, er lidt større end den ellers vilde have været. Hvis Gentagelserne derimod sker hurtigt efter hinanden, vil dette medføre en Ophobning af Opkald umiddelbart efter de kritiske Tidspunkter, hvor alle Ledningerne er optaget, og dermed føre til en Forlængelse af disse kritiske Tilstande. En øvre Grænse for Indflydelsen vilde faas, hvis alle afviste Opkald blev gentaget uafbrudt med ganske korte Mellemrum, indtil Forbindelse opnaaedes, idet Forholdene da vilde være, som om Systemet arbejdede med Ventetid i Stedet for med Afvisning. I almindelig Praksis er Indflydelsen dog vistnok ret ringe.

16. Særledninger og Fællesledninger.

Inden vi forlader Afvisningsteorien, skal jeg kort berøre et mere kompliceret Problem, som er af stor praktisk Betydning for automatiske Telefonsystemer, og som derfor har været Genstand for omfattende Undersøgelser, nemlig det Problem, der foreligger, naar Trafiken kræver flere Ledninger end svarende til Vælgernes Kontaktantal.

Lad os som et praktisk Eksempel antage, at vi anvender 20-Kontakts-Vælgere, og at der fra en Gruppe saadanne Vælgere skal føres Trafikmængden y = 60,42 i en vis Retning med 2 ‰ Afvisning. Hvis vi kunde samle hele denne Trafik i et simpelt Ledningsbundt, vilde der kræves 81 Ledninger, jævnf. Fig. 11 A. Dette er imidlertid umuligt, da Vælgerne kun har 20 Kontakter, og den mest nærliggende Udvej er da at dele Vælgerne i et Antal Grupper, saaledes at hver Gruppe faar et Bundt paa 20 Ledninger, jævnf. Fig. 11 B. Da et Bundt paa 20 Ledninger kan tage Trafiken y = 10,07 for 2 ‰ Afvisning, hvilket netop er $^1/_6$ af den totale Trafik, skal Vælgerne deles i 6 Grupper med hver sit Bundt à 20 Ledninger, ialt 120 Ledninger, hvilket er 48% flere Ledninger end i Tilfælde A. Denne Metode er derfor meget uøkonomisk, og et væsentlig bedre Resultat kan faas ved det i Fig. 11 C viste System, der er almindeligt anvendt i Praksis og betegnes som »*Sær- og Fællesledninger*« eller med det engelske Udtryk »*Grading*«. Vælgerne er her delt i et Antal Grupper, og hver Gruppe har paa de første Kontakter et Antal individuelle Ledninger, »Særledningerne«, medens de sidste Kontakter fører til et Antal »Fællesledninger«, der er fælles for alle Vælgerne.

At der ved en saadan Ordning kan opnaas en Ledningsbesparelse i Forhold til Delingen i adskilte Bundter, kan indses ved følgende Ræsonnement: Ved Delingen i adskilte Bundter fører de sidste Ledninger i hvert Bundt kun en ringe Del af Trafiken, og disse sidste Ledninger kan betragtes som en Reserve, der kun tages i Brug paa de Tidspunkter, hvor Momentanværdien af den tilfældigt varierende Trafik er særlig stor; men da disse »Trafikspidser« for hver Gruppe falder paa rent tilfældige Tidspunkter, vil de for Størstedelen falde paa forskellige Tidspunkter i de forskellige Grupper, d.v.s. de forskellige Grupper har sjældent Brug for hele deres Reserve samtidig, hvorfor der maa kunne opnaas en Besparelse ved at give Grupperne en fælles Reserve. Det fremgaar endvidere heraf, at Fællesledningerne altid skal søges sidst af Vælgerne, hvorfor man i Gradinger ikke maa indrette en Revolvering, der blander Særledningerne og Fællesledningerne imellem hinanden.

Det viser sig ved nærmere Undersøgelse, at den mest effektive Udnyttelse af Ledningerne opnaas, naar Antallet af Fællesledninger er ca. Halvdelen af Kontaktantallet, og man finder, at der i saa Tilfælde i det foreliggende Eksempel kræves ialt 100 Ledninger for 2 ‰ Afvisning, hvilket giver den i Fig. 11 C viste Ordning med 9 Grupper à 10 Særledninger samt 10 Fællesledninger. Det nødvendige Ledningsantal er her kun 23 % mere end for det simple Bundt, saa der opnaas en væsentlig Besparelse i Forhold til Delingen i adskilte Bundter.

Det sandsynlighedsteoretiske Problem, der herved stilles, nemlig at beregne Afvisningen for en given Grading med given Trafik, støder imidlertid paa en Vanskelighed, der forøvrigt er karakteristisk ogsaa for forskellige andre mere komplicerede Opgaver, nemlig at det rent formelt er let nok at angive Vejen til den exakte Løsning, medens den virkelige Udførelse bliver uigennemførlig paa Grund af, at de nødvendige Beregninger

bliver for besværlige. Metoden til den nøjagtige Løsning er ganske den samme, som vi i Afsnit 10 anvendte ved Udledelsen af Erlangs Formler for det simple Ledningsbundt, nemlig den statistiske Ligevægts Princip, og Opstillingen af den statistiske Ligevægts Ligninger mellem Systemets forskellige mulige Tilstande volder ingen Vanskeligheder; men Ligningerne bliver betydelig mere komplicerede, og det har, i hvert Fald hidtil, vist sig umuligt at angive explicite Formler for Løsningen af Ligningssystemet. Man har derfor kun den Udvej at løse Ligningerne rent numerisk ved at indsætte Talværdierne for Ledningsantallene og Trafiken, hvilket imidlertid bliver uigennemførligt for de i Praksis forekommende Ledningsantal, da Ligningernes Antal bliver meget stort. Bestaar Gradingen af g Grupper à s Særledninger samt f Fællesledninger, kan hver Gruppe Særledninger befinde sig i $s+1$ forskellige Tilstande, og Fællesledningerne i $f+1$ forskellige Tilstande, nemlig henholdsvis 0,1,2...s og 0,1,2...f optagne Ledninger, hvorfor Antallet af mulige Tilstande i Systemet bliver:

$$N_1 = (s+1)^g \cdot (f+1),$$

som alle er forskellige, hvis de g Grupper alle fører forskellige Trafikmængder. For det praktisk vigtigste Tilfælde, hvor de g Grupper alle fører samme Trafik, bliver imidlertid de Tilstande ens, der blot repræsenterer forskellige Permutationer af Gruppenumrene, og Antallet af mulige forskellige Tilstande reduceres til:

$$N_2 = \frac{(g+s)\,!}{g\,!\,s\,!} \cdot (f+1).$$

For den i Fig. 11 C viste Grading, hvor $g = 9$, $s = f = 10$, bliver Antallet af forskellige Tilstande og dermed ogsaa Antallet af den statistiske Ligevægts Ligninger henholdsvis $N_1 = 25\,937\,424\,601$ og $N_2 = 1\,016\,158$.

Man maa derfor nøjes med tilnærmede Beregningsmetoder, som tildels støtter sig paa Erfaringer og Forsøg. Der findes forskellige saadanne Metoder, som giver ret godt overensstemmende Resultater. Som den bedst begrundede af disse Tilnærmelsesmetoder kan anses den ved Post Office i England under Ledelse af *O'Dell* udarbejdede Beregningsmaade; denne gaar ud fra en Formel af *Erlang*, gyldig for et andet System for begrænset Adgang til et Ledningsbundt, for hvilket en teoretisk exakt Beregning er let gennemførlig, og som er endnu mere effektivt end Gradingsystemet, men uegnet til praktisk Anvendelse; Afvigelserne af Gradingsystemers Effektivitet fra dette Erlang'ske System er fastslaaet ved et stort Antal Forsøg, udført ved Post Office.

17. Erlangs Ventetidsteori for exponentielt fordelt Samtalelængde.

Vi gaar derefter over til Omtalen af det simpleste Problem i Teorien for Ventetidssystemer, nemlig et simpelt Ledningsbundt med x Ledninger belastet med tilfældig fordelt Trafik af Størrelsen y, og vi forudsætter endvidere, at Samtalelængden følger den i Afsnit 9 omtalte exponentielle Fordelingslov. For Ventetidssystemer er Samtalelængdens Fordelingslov af væsentlig Betydning, idet man faar forskellige Resultater, naar Samtalelængden følger forskellige Fordelingslove, i Modsætning til, hvad der var Tilfældet for Afvisningssystemer.

Forskellen fra Afvisningssystemer er nu den, at de Opkald, der finder alle x Ledninger optaget, ikke faar et Optagetsignal, men faar Lov at vente paa, at der bliver en Ledning ledig, idet de Vælgere, Opkaldene staar paa, vedbliver at rotere og søge over Ledningerne, indtil der er blevet en Ledning ledig, eller Abonnenten er blevet ked af at vente. Den gængse Ventetidsteori, saaledes som den er udviklet af *Erlang* og næsten udelukkende anvendt hidtil, ser imidlertid bort fra denne sidste Mulighed, at Abonnenten eventuelt opgiver at vente, og gør den simplificerende Forudsætning, at alle ventende Opkald vedbliver at vente, indtil de faar en ledig Ledning, og jeg skal derfor begynde med dette Tilfælde.

Ganske som i Afvisningsteorien benyttes den statistiske Ligevægts Princip, og ved at betragte Systemets mulige Tilstandsændringer i en uendelig kort Tid findes den statistiske Ligevægts Ligninger for Systemets forskellige Tilstandssandsynligheder. Medens der i Afvisningsteorien kun var de $x+1$ mulige Tilstande 0,1,2...x Ledninger optaget med Sandsynlighederne P_0, P_1, P_2... P_x, bliver nu den sidstnævnte Tilstand, alle x Ledninger optaget, spaltet i et uendeligt Antal forskellige Tilstande med 0,1,2... ventende Opkald, henholdsvis med Sandsynlighederne $p_{x,0}$, $p_{x,1}$, $p_{x,2}$ ..., saaledes at $P_x = \sum_{n=0}^{\infty} p_{x,n}$. Er Systemet f. Eks. i Tilstanden $p_{x,n}$, x optagne Ledninger og n ventende Opkald, kan, ifølge Forudsætningen om, at ingen af de ventende Opkald opgiver at vente, denne Tilstand kun forandres enten ved, at der kommer et nyt Opkald, hvilket fører til Tilstanden $p_{x,\,n+1}$, eller ved at 1 af de x optagne Ledninger bliver ledig, hvilket fører til Tilstanden $p_{x,\,n-1}$. Af Ligevægtsligningerne findes da følgende Udtryk for Tilstandssandsynlighederne:

$$P_0 = \frac{1}{1 + y + \frac{y^2}{2!} + \cdots + \frac{y^{x-1}}{(x-1)\,!} + \frac{x}{x-y} \cdot \frac{y^x}{x!}}$$

$$P_1 = y \cdot P_0,\ P_2 = \frac{y^2}{2} \cdot P_0 \ldots\ P_{x-1} = \frac{y^{x-1}}{(x-1)\,!} \cdot P_0,$$

$$p_{x,0} = \frac{y^x}{x!} \cdot P_0,\ p_{x,1} = \frac{y}{x} \cdot \frac{y^x}{x!} \cdot P_0 \ldots$$

$$\ldots\ p_{x,n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n \cdot \frac{y^x}{x!} \cdot P_0 \ldots$$

$$P_x = \sum_{n=0}^{\infty} p_{x,n} = \frac{x}{x-y} \cdot \frac{y^x}{x!} \cdot P_0.$$

Af særlig Interesse er den Del D af Opkaldene, der bliver forsinket, hvilket er den Del af Opkaldene, der indtræffer paa Tidspunkter, hvor alle Ledningerne er optaget, altsaa:

$$D = P_x = \frac{\frac{y^x}{x!} \cdot \frac{x}{x-y}}{1 + y + \cdots \frac{y^{x-1}}{(x-1)\,!} + \frac{y^x}{x!} \cdot \frac{x}{x-y}}.$$

Denne Størrelse D, det relative Antal forsinkede Opkald, svarer til Størrelsen B, det relative Antal afviste Opkald, i Afvisningsteorien, men er, som Udtrykket for D viser, altid større end B for de samme Værdier af x og y; f. Eks. faas for $x = 20$ og $y = 10{,}07$, hvilket giver Afvisningen $B = 2\,‰$, at $D = 4{,}02\,‰$.

Denne Del D af Opkaldene faar altsaa en længere el-

ler kortere Ventetid, og den gennemsnitlige Ventetid pr. Opkald, Middelventetiden, findes paa følgende Maade. Tilstandssandsynlighederne $p_{x,1}$, $p_{x,2}$ ... $p_{x,n}$ ... angiver den Del af Tiden, hvori der staar 1,2...n... ventende Opkald, og Middelværdien af den sammenlagte Ventetid for alle ventende Opkald er derfor pr. Tidsenhed:

$$V = 1 \cdot p_{x,1} + 2 \cdot p_{x,2} + \ldots + n \cdot p_{x,n} + \ldots$$

$$= \frac{y^x}{x!} \cdot P_o \cdot \left(\frac{y}{x} + 2 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \ldots + n \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^n + \ldots\right) =$$

$$\frac{y^x}{x!} \cdot P_o \cdot \frac{xy}{(x-y)^2} = \frac{y}{x-y} \cdot D.$$

Divideres V med $y \cdot D$, der er Antallet af forsinkede Opkald pr. Tidsenhed, faas følgende meget simple Udtryk for Middelventetiden pr. forsinket Opkald:

$$m = \frac{V}{y \cdot D} = \frac{1}{x-y},$$

hvor Tidsenheden stadig er Middelsamtalelængden; ønskes Ventetiden angivet i Sekunder, skal multipliceres med Middelsamtalelængden i Sekunder. For Eksemplet med $x = 20$, $y = 10{,}07$ faas under Forudsætning af, at Middelsamtalelængden er 2,5 Min. = 150 Sek., at Middelventetiden pr. forsinket Opkald bliver 0,1007 Samtalelængde = 15,1 Sek.

Imidlertid er det ikke denne Størrelse, der sædvanlig forstaas ved Middelventetiden, men derimod den gennemsnitlige Ventetid for samtlige Opkald, ogsaa indbefattet alle de Opkald, der overhovedet ikke faar Ventetid; denne Middelventetid bliver:

$$M = \frac{V}{y} = D \cdot m.$$

I det betragtede Eksempel faas: $M = 0{,}00402 \cdot 15{,}1 = 0{,}0607$ Sek.

Det er forsaavidt uheldigt, at denne Størrelse betegnes som Middelventetiden, da Kendskabet til denne alene ikke giver noget Indtryk af Størrelsen af de virkelige Ventetider, der fordeler sig omkring m, Middelventetiden pr. forsinket Opkald. Forholdene karakteriseres derfor bedst ved Angivelse af baade D, det relative Antal forsinkede Opkald, og m, Middelventetiden pr. forsinket Opkald.

Foruden de omtalte Størrelser kan man udfra Tilstandssandsynlighederne finde forskellige andre Størrelser, hvoraf Sandsynligheden for at faa en Ventetid større end en given Længde har størst praktisk Interesse. Jeg skal dog ikke komme nærmere ind herpaa, men blot bemærke, at den nævnte Sandsynlighed for Ventetider større end en given Længde afhænger af den Rækkefølge, hvori de ventende Opkald ekspederes. Det sædvanlige i Praksis er, at de ventende Opkald søger ind paa Ledningsbundtet i tilfældig Rækkefølge, hvilket giver større Spredning af Ventetiderne omkring deres Middelværdi og dermed større Sandsynlighed for lange Ventetider, end hvis man ved særlige Arrangementer sørger for, at de ventende Opkald ekspederes i retfærdig Orden, d. v. s. i den Rækkefølge, hvori Opkaldene er ankommet.

18. Palms Ventetidsteori.

Erlangs Ventetidsteori forudsætter som omtalt, at alle ventende Opkald vedbliver at vente, indtil de faar en ledig Ledning, hvilket dog ikke er Tilfældet i Virkeligheden. Abonnenter, der ikke faar Forbindelse efter en vis Tids Forløb, opgiver at vente og kalder eventuelt igen senere. *Conny Palm* har i 1937 behandlet Spørgsmaalet under den naturlige Antagelse, at denne maximale Ventetid fordeler sig exponentielt omkring en Middelværdi a. Ved Anvendelse af den statistiske Ligevægts Princip faas følgende Resultater:

Idet S betegner Rækken:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ay)^n}{(ax+1) \cdot (ax+2) \ldots (ax+n)}$$

bliver det relative Antal forsinkede Opkald:

$$D = \frac{\frac{y^x}{x!} \cdot (1+S)}{1 + y + \ldots + \frac{y^{x-1}}{(x-1)!} + \frac{y^x}{x!} \cdot (1+S)}.$$

Af disse forsinkede Opkald vil:

$$D_1 = D \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{S}{1+S}$$

faa en ledig Ledning efter en vis Ventetid, medens Resten:

$$D_2 = D - D_1$$

vil opgive at vente.

Den gennemførte Trafik bliver altsaa: $y \cdot (1 - D_2)$.

Middelventetiden pr. forsinket Opkald bliver:

$$m = a \cdot \left(1 - \frac{x}{y} \cdot \frac{S}{1+S}\right),$$

og Middelventetiden for alle Opkald: $M = D \cdot m$.

Disse Ventetidsformler indeholder som specielle Tilfælde de i Afsnit 10 og 17 omtalte Erlangske Formler for Afvisning og for ubegrænset Ventetid, som faas ved henholdsvis at sætte $a = o$ og $a = \infty$.

Der findes endnu et specielt Tilfælde, som er ganske morsomt, idet man for $a = 1$ finder:

$$D = \sum_{n=x}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \cdot e^{-y},$$

hvilket er identisk med den i Afsnit 7 omtalte Tilnærmelsesformel for Afvisningen; denne Formel gælder altsaa i Virkeligheden exakt for det relative Antal forsinkede Opkald, hvis Abonnenterne er villige til at vente en Tid, der i Gennemsnit er lig Middelsamtalelængden.

Paa Fig. 12 er som Eksempel beregnet Kurver for det relative Antal forsinkede Opkald D og Middelventetiden pr. forsinket Opkald m for et Bundt paa $x = 20$ Ledninger under Forudsætning af, at Middelsamtalelængden er 2,5 Min. = 150 Sek. Kurven for $a = o$ er B-Kurven for ren Afvisning, medens de øvrige Kurver gælder for Ventetidssystemer; Kurven for $a = 0{,}2 = 30$ Sek. er antagelig den, der er i bedst Overensstemmelse med Virkeligheden i et vel indrettet Telefonsystem, hvor Abonnenterne er vant til at faa hurtigt Svar; som det ses, giver denne Kurve væsentlig mindre Værdier af D og m end Kurven for $a = \infty$, der svarer til Erlangs Ventetidsteori.

Forløbet af m-Kurverne viser, at Middelventetiden pr. forsinket Opkald kun varierer lidet, naar Trafiken y varierer omkring de praktisk anvendelige Værdier. Kurverne for Middelventetiden for alle Opkald $M = D \cdot m$

faar derfor omtrent samme Forløb som D-Kurverne, blot en Smule »stejlere«.

Ved den praktiske Beregning af Ledningsantal faar man derfor ret nær samme Resultater, enten man foreskriver bestemte Værdier af D, det relative Antal forsinkede Opkald, eller af M, Middelventetiden for alle Opkald. Endvidere kan som økonomisk rationel Beregningsbasis benyttes »Forbedringskurver« for D eller M ganske analoge med de i Afsnit 12 omtalte.

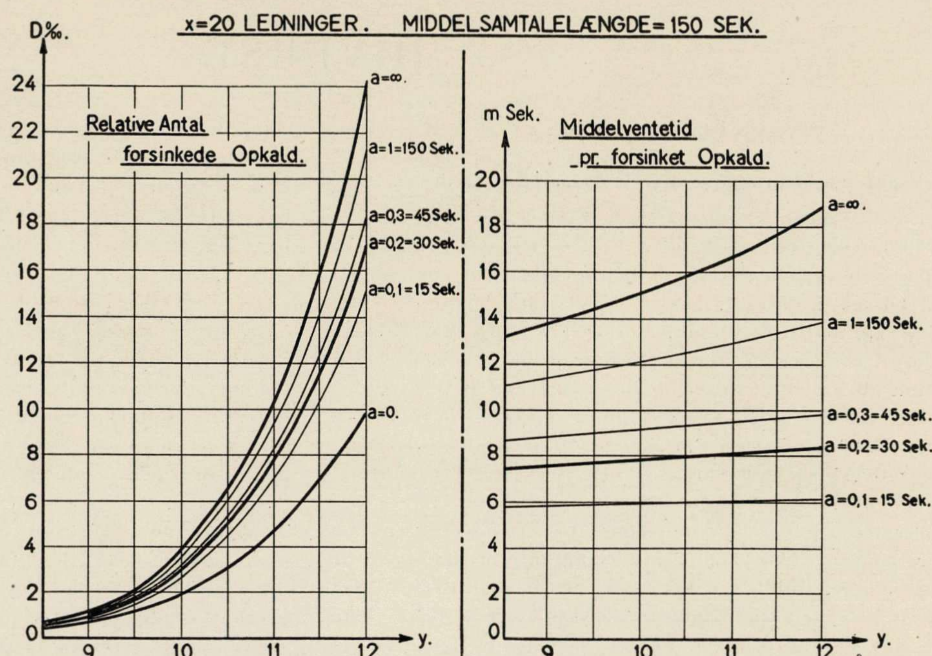


Fig. 12.

19. Erlangs Ventetidsteori for konstant Samtalelængde.

Behandlingen af Ventetidsproblemer i Tilfælde, hvor Samtalelængden følger en anden Fordelingslov end den exponentielle, medfører store matematiske Vanskeligheder, og der er hidtil kun opnaaet Resultater for det specielle Tilfælde, at Samtalelængden er konstant, altsaa alle Samtaler lige lange, og kun under Forudsætning af ubegrænset Venten. Det simpleste Tilfælde af dette Problem, nemlig naar der kun er 1 Ledning, blev løst exakt af *Erlang* allerede i hans første Arbejde om disse Ting i 1909, og senere har Erlang angivet Løsningen for et simpelt Ledningsbundt med vilkaarligt Ledningsantal. Erlang naaede dog ikke til at udtrykke sin Løsning i Form af almengyldige explicite Formler, hvilket først er lykkedes for *F. Pollaczek* (1930) og *C. D. Crommelin* (1932); navnlig Crommelins Arbejde udmærker sig ved en elegant matematisk Behandling af dette vanskelige Problem. Jeg skal ikke her komme ind paa Spørgsmaalet, men blot bemærke, at i Tilfælde af konstant Samtalelængde faas noget færre forsinkede Opkald og mindre Ventetider end for exponentiel Fordeling. Ved Beregning af Ledningsantal for mellembys Trafik og andre Tilfælde, hvor Samtalelængdens Fordelingslov er en Mellemting mellem konstant og exponentiel, er man derfor paa den sikre Side, naar man holder sig til de simple og bekvemme Formler, der gælder for exponentiel Fordeling.

20. Andre Problemer.

Efter at vi i det foregaaende hovedsagelig har beskæftiget os med Teorien for det simple Ledningsbundt i den statistiske Ligevægtstilstand, skal jeg til Slut blot nævne nogle enkelte Eksempler paa andre sandsynlighedsteoretiske Problemer inden for Telefontrafikens Omraade.

Variabel Trafikintensitet. Hvad angaar Teorien for Ledningsbundter, behøver man ikke at indskrænke sig til den statistiske Ligevægtstilstand, selv om denne praktisk set er langt den vigtigste. Den i Afsnit 6 givne sandsynlighedsteoretiske Definition af tilfældigt fordelt Trafik kan uden videre udvides til at gælde, naar Trafikintensiteten er variabel, idet blot y bliver en Funktion y(t) af Tiden; Ledningsbundtets Tilstandssandsynligheder bliver da ogsaa Funktioner af Tiden. Undersøgelser af denne Art har navnlig praktisk Interesse i Forbindelse med Spørgsmaalet om, hvor hurtigt den statistiske Ligevægtstilstand opnaas, naar Trafikintensiteten bliver konstant.

Fordelingssystemer. Som et Eksempel paa mere komplicerede Trafikproblemer kan nævnes Beregning af Ventetider i automatiske Fordelingssystemer til manuelle Ekspeditionspladser. Et saadant System bestaar af et Antal Vælgergrupper, der fører Trafik til et Antal »Snore« fordelt over en Gruppe Ekspeditionspladser; en Vælger kan kun søge ind paa en Snor, hvis baade Snoren er ledig, og den Plads, hvori Snoren sidder, ikke er optaget af en Ekspedition. Behandlingen af saadanne Systemer er naturligvis væsentlig mere kompliceret end simple Ledningsbundter, hvor et Opkald altid kan søge ind paa en Ledning, hvis blot denne er ledig.

Maskintider. En Klasse Problemer af en anden Art er Beregningen af Maskintider, d.v.s. Vælgernes Arbejdstider. Disse Maskintider afhænger dels af Vælgernes Hastighed og Kontaktantal, dels af Vælgernes Anvendelsesmaade. Maskintiderne adderes til de tidligere omtalte Ventetider, der opstaar paa Grund af Optagethed.

Trafiktælling og Statistik. Endelig kan som et vigtigt Omraade nævnes Tælling og Maaling af Telefontrafik, hvorved de til Beregningen af Telefonsystemer nødvendige Data bestemmes. Man anvender dels Tællere, som tæller Antallet af Opkald til en bestemt Ledning eller et Ledningsbundt etc., dels saakaldte Alfa-Ure, der direkte maaler en Lednings α, og dels automatiske eller manuelle Testanordninger, der med bestemte korte Mellemrum registrerer Antallet af optagne Ledninger i et Ledningsbundt. Bestemmelsen af det nødvendige Omfang af Maalingerne for at opnaa en passende Nøjagtighed og af, hvilke Maalemetoder der er mest hensigtsmæssige i de forskellige Tilfælde, rejser en Række sandsynlighedsteoretiske og statistiske Problemer. *)

*) Forskellige Litteraturhenvisninger følger i næste Nr. af »Elektroteknik«, Side 40.